

Instruktion

Lineare Gleichungssysteme (Gaußscher Algorithmus)



Eine Firma stellt drei verschiedene Produkte A, B und C her. Die Produkte durchlaufen während ihrer Herstellung drei verschiedene Werkstätten, eine Schreinerei, eine Schlosserei und eine Kunststoffwerkstatt. Dabei wird zur Herstellung eines Stücks dieser Produkte jeweils eine bestimmte Anzahl von Arbeitsstunden in den einzelnen Werkstätten benötigt:

	A	B	C
Schreinerei	6	2	0
Schlosserei	4	3	3
Kunststoff	0	1	4

Bestimmen Sie nun, wie viel Stück der Werkstücke A, B und C hergestellt werden können, wenn in der Schreinerei 22 Stunden, in der Schlosserei 33 Stunden und in der Kunststoffwerkstatt 22 Stunden benötigt werden.

$$(I) \quad 6x_1 + 2x_2 + 0x_3 = 22$$

$$(II) \quad 4x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 33$$

$$(III) \quad 0x_1 + x_2 + 4x_3 = 22$$

"Lineares Gleichungssystem"

Lösung des linearen Gleichungssystems mit Hilfe des Gaußschen Algorithmus

$$(I) \quad 6x_1 + 2x_2 + 0x_3 = 22$$

$$(II) \quad 4x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 33$$

$$(III) \quad 0x_1 + x_2 + 4x_3 = 22$$

Koeffizientenmatrix:

$$A = \begin{array}{c} x_1 \quad x_2 \quad x_3 \\ \left(\begin{array}{ccc} 6 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{array} \right) \end{array}$$

Erweiterte Koeffizientenmatrix:

$$(A/b) = \begin{array}{c} x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad \text{r.S.} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 2 & 0 & 22 \\ 4 & 3 & 3 & 33 \\ 0 & 1 & 4 & 22 \end{array} \right) \end{array}$$

Ziel: Dreiecksform der Koeffizientenmatrix

$$\begin{array}{c} x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad \text{r.S.} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{array} \right) \end{array} \quad * \text{ sind reelle Zahlen}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 2 & 0 & 22 \\ 4 & 3 & 3 & 33 \\ 0 & 1 & 4 & 22 \end{array} \right)$$

1. Schritt: In der ersten Spalte muss statt 4 eine Null stehen

$$4 \cdot (I) - 6 \cdot (II): \quad 0 \quad -10 \quad -18 \quad | \quad -110$$

$$\begin{array}{l} (I) \\ (II) \\ (III) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 2 & 0 & 22 \\ 0 & -10 & -18 & -110 \\ 0 & 1 & 4 & 22 \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{l} (I) \\ (II) \\ (III) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 2 & 0 & 22 \\ 0 & 5 & 9 & 55 \\ 0 & 1 & 4 & 22 \end{array} \right)$$

2. Schritt: In der zweiten Spalte muss statt 1 eine Null stehen

$$5 \cdot (III) - (II): \quad 0 \quad 0 \quad 11 \quad | \quad 55$$

$$\begin{array}{l} (I) \\ (II) \\ (III) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 2 & 0 & 22 \\ 0 & 5 & 9 & 55 \\ 0 & 0 & 11 & 55 \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{l} (I) \\ (II) \\ (III) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 2 & 0 & 22 \\ 0 & 5 & 9 & 55 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array} \right)$$

3. Schritt: Berechnen der Lösung des linearen Gleichungssystems

$$(III) \Rightarrow x_3 = 5$$

$$(II) \Rightarrow 5x_2 + 9x_3 = 55 \Rightarrow x_2 = 2$$

$$(I) \Rightarrow 6x_1 + 2x_2 = 22 \Rightarrow x_1 = 3$$

$\Rightarrow (3/2/5)$ ist Lösung des linearen Gleichungssystems (LGS)

Allgemeines lineares Gleichungssystem:

$$(I) \quad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$(II) \quad a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

(III)

(IV)

:

:

$$(m) \quad a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

m Gleichungen für n Unbekannte (m – n – System)

Es gilt:

(1) Ist $(b_1, b_2, \dots, \underline{b_m}) = (0, 0, \dots, 0)$, so heißt das lineare Gleichungssystem homogen, sonst inhomogen.

(2) Ist $m > n$ ($m < n$), so heißt das lineare Gleichungssystem überbestimmt (unterbestimmt).

Lösbarkeit von linearen Gleichungssystemen

$$\begin{array}{l} \text{(I)} \\ \text{(II)} \\ \text{(III)} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 2 & 0 & 22 \\ 0 & 5 & 9 & 55 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array} \right)$$

LGS hat eine eindeutige Lösung

$$\begin{array}{l} \text{(I)} \\ \text{(II)} \\ \text{(III)} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & -1 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right)$$

LGS hat keine Lösung

$$\begin{array}{l} \text{(I)} \\ \text{(II)} \\ \text{(III)} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

LGS hat unendlich viele Lösungen
mit einer frei wählbaren Variablen

Berechnung der Lösung eines linearen Gleichungssystems mit unendlich vielen Lösungen

$$\begin{array}{l} \text{(I)} \\ \text{(II)} \\ \text{(III)} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\text{(III)} \Rightarrow 0x_3 = 0 \Rightarrow x_3 \text{ beliebig z.B. } x_3 = z$$

$$\text{(II)} \Rightarrow -5x_2 + 5x_3 = -1 \Rightarrow x_2 = \frac{1}{5} + z$$

$$\text{(I)} \Rightarrow x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \Rightarrow x_1 = \frac{6}{5} - z$$

$$\Rightarrow \left(\frac{6}{5} - z, \frac{1}{5} + z, z \right) \text{ ist Lösung des linearen Gleichungssystems (LGS)}$$

$$(I) \quad x_1 - 2x_2 + x_3 = 1$$

$$(II) \quad -x_1 - 5x_2 - 5x_3 = 0$$

unterbestimmtes Gleichungssystem
(weniger Gleichungen als Variable)

$$\begin{array}{l} (I) \\ (II) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ -1 & -5 & -5 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{(I)+(II)} \begin{array}{l} (I) \\ (II) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -7 & -4 & 1 \end{array} \right)$$

$$(II) \Rightarrow -7x_2 - 4x_3 = 1 \Rightarrow x_3 \text{ beliebig z.B. } x_3 = z \Rightarrow x_2 = -\frac{1}{7} - \frac{4}{7}z$$

$$(I) \Rightarrow x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \Rightarrow x_1 = \frac{5}{7} - \frac{15}{7}z$$

$$\Rightarrow \left(\frac{5}{7} - \frac{15}{7}z \mid -\frac{1}{7} - \frac{4}{7}z \mid z \right) \text{ ist Lösung des LGS}$$

Unterbestimmte Gleichungssysteme haben entweder keine Lösung oder unendlich viele Lösungen

$$(I) \quad x_1 - 7x_2 = 22$$

$$(II) \quad 3x_1 + 5x_2 = -12$$

$$(III) \quad 3x_1 + 6x_2 = 8$$

überbestimmtes Gleichungssystem
(mehr Gleichungen als Variable)

$$\begin{array}{l} (I) \\ (II) \\ (III) \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -7 & 22 \\ 3 & 5 & -12 \\ 3 & 6 & 8 \end{array} \right) \xrightarrow{3 \cdot (I) - (III)} \begin{array}{l} (I) \\ (II) \\ (III) \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -7 & 22 \\ 3 & 5 & -12 \\ 0 & -27 & 58 \end{array} \right)$$

$$(III) \Rightarrow -27x_2 = 58 \Rightarrow x_2 = -\frac{58}{27}$$

$$(II) \Rightarrow 3x_1 + 5x_2 = -12 \Rightarrow x_1 = -\frac{34}{81}$$

$$\text{Überprüfen mit (I): } x_1 - 7x_2 = 22 \Rightarrow -\frac{34}{81} - 7 \cdot \left(-\frac{58}{27}\right) = 22 \Rightarrow \frac{1181}{81} = 22 \quad (f)$$

$$\Rightarrow IL = \emptyset$$

Gekürztes Gauß-Verfahren

$$(I) \quad 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0$$

$$(II) \quad x_1 + x_2 + x_3 + 1 = 0$$

$$(III) \quad -x_2 + 2x_3 - 1 = -5x_1$$

$$(I) \quad 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0$$

$$(II) \quad x_1 + x_2 + x_3 = -1$$

$$(III) \quad 5x_1 - x_2 + 2x_3 = 1$$

$$\begin{array}{l} (I) \\ (II) \\ (III) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & r. S. \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 5 & -1 & 2 & 1 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} \text{(I)} \\ \text{(II)} \\ \text{(III)} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ 0 & \text{---} & \text{---} & \text{---} \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} \text{(I)} \\ \text{(II)} \\ \text{(III)} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & r.S. \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 5 & -1 & 2 & 1 \end{array} \right)$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 - 1 \cdot 3 = -1$$

$$\begin{array}{l} \text{(I)} \\ \text{(II)} \\ \text{(III)} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & r.S. \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 5 & -1 & 2 & 1 \end{array} \right)$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 - 1 \cdot 1 = 1$$

$$\begin{array}{l} \text{(I)} \\ \text{(II)} \\ \text{(III)} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & r.S. \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 5 & -1 & 2 & 1 \end{array} \right)$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2(-1) - 1 \cdot 0 = -2$$

$$\begin{array}{l} \text{(I)} \\ \text{(II)} \\ \text{(III)} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & - & - & - \\ 0 & - & - & - \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} \text{(I)} \\ \text{(II)} \\ \text{(III)} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & r.S. \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 5 & -1 & 2 & 1 \end{array} \right) \quad \left| \begin{array}{cc} 2 & 3 \\ 5 & -1 \end{array} \right| = 2(-1) - 5 \cdot 3 = -17$$

$$\begin{array}{l} \text{(I)} \\ \text{(II)} \\ \text{(III)} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & r.S. \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 5 & -1 & 2 & 1 \end{array} \right) \quad \left| \begin{array}{cc} 2 & 1 \\ 5 & 2 \end{array} \right| = 2 \cdot 2 - 5 \cdot 1 = -1$$

$$\begin{array}{l} \text{(I)} \\ \text{(II)} \\ \text{(III)} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & r.S. \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 5 & -1 & 2 & 1 \end{array} \right) \quad \left| \begin{array}{cc} 2 & 0 \\ 5 & 1 \end{array} \right| = 2 \cdot 1 - 5 \cdot 0 = 2$$

$$\begin{pmatrix} \text{III} \\ \text{II} \\ \text{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \text{r.S.} \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & -17 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{III} \\ \text{II} \\ \text{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \text{r.S.} \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & - & - \end{pmatrix} \quad -1 \text{ neues Pivotelement}$$

$$\begin{pmatrix} \text{III} \\ \text{II} \\ \text{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \text{r.S.} \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & -17 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -17 & -1 \end{vmatrix} = (-1)(-1) - (-17) \cdot 1 = 18$$

$$\begin{pmatrix} \text{III} \\ \text{II} \\ \text{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \text{r.S.} \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & -17 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -17 & 2 \end{vmatrix} = -1 \cdot 2 - (-17)(-2) = -36$$

$$\begin{pmatrix} \text{III} \\ \text{II} \\ \text{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \text{r.S.} \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 18 & -36 \end{pmatrix}$$

Anmerkungen und Sonderfälle

- o Es gibt keine Divisionen, nur Multiplikationen. Brüche werden also vermieden.
- o Jede Zeile (auch in den Zwischenschritten) kann man mit einer Zahl multiplizieren oder dividieren. Man könnte in obigem Beispiel im letzten Schritt Zeile III mit 18 kürzen.
- o Das gekürzte Gauß-Verfahren und die herkömmliche Vorgehensweise können auch kombiniert werden.

$$\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & \text{r.S.} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 5 & 51 \\ 3 & -5 & -6 & -4 \\ 5 & 1 & 1 & 33 \end{array} \right) & \rightsquigarrow & \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 5 & 51 \\ 0 & -7 & -27 & -161 \\ 0 & 7 & -23 & -189 \end{array} \right) & \xrightarrow{\text{II} + \text{III}} & \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 5 & 51 \\ 0 & -7 & -27 & -161 \\ 0 & 0 & -50 & -350 \end{array} \right)
 \end{array}$$

- o Steht in der zweiten, dritten, oder ... Zeile an der ersten Stelle eine Null, so ist für diese Zeile das „Kreuzeln“ überflüssig; die Zeile kann direkt übernommen werden.

$$\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & \text{r.S.} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & -6 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \end{array} \right) & \rightsquigarrow & \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & -6 \\ 0 & -8 & -2 & -2 \end{array} \right) & \rightsquigarrow & \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & -6 \\ 0 & 0 & 28 & -52 \end{array} \right)
 \end{array}$$

- o Ist das Pivotelement die Null, so muss man diese Zeile mit einer anderen Zeile vertauschen. Diese Prozedur gilt auch bei weiteren Schritten.
- o Falls bei Parameternaufgaben nicht sichergestellt ist, dass das Pivotelement von Null verschieden ist, so muss diese Zeile weggetauscht werden oder als Sonderfall betrachtet werden.

Lineare Gleichungssysteme mit Parameter

Bestimmen Sie die Anzahl der Lösungen des folgenden linearen Gleichungssystems in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$. 

$$\begin{array}{ll}
 \text{(I)} & -ax_1 + (a-2)x_2 = a \\
 \text{(II)} & -x_2 + x_3 = 1 \\
 \text{(III)} & 2x_1 - x_2 + 3x_3 = a+2
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ll}
 \text{(I)} & \left(\begin{array}{ccc|c} -a & a-2 & 0 & a \end{array} \right) \\
 \text{(II)} & \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right) \\
 \text{(III)} & \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & a+2 \end{array} \right)
 \end{array}
 \xrightarrow{\text{Zeile (I) und (III) tauschen}}
 \begin{array}{ll}
 \text{(I)} & \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & a+2 \end{array} \right) \\
 \text{(II)} & \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right) \\
 \text{(III)} & \left(\begin{array}{ccc|c} -a & a-2 & 0 & a \end{array} \right)
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 \text{(I)} & \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & a+2 \end{array} \right) \\
 \text{(II)} & \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right) \\
 \text{(III)} & \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & a-4 & 3a & a^2+4a \end{array} \right)
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ll}
 \text{(I)} & \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & a+2 \end{array} \right) \\
 \text{(II)} & \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right) \\
 \text{(III)} & \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & -4a+4 & -a^2-5a+4 \end{array} \right)
 \end{array}$$

$$-4a+4=0 \Rightarrow a=1$$

$a=1$: $0 \ 0 \ 0 \mid -2 \Rightarrow$ das LGS hat keine Lösung

$a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$: das LGS hat eine eindeutige Lösung